ΜΕΜ-253: Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων
Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για ένα πρόβλημα δυο σημείων με συνοριακές συνθήκες Neumann

Διατύπωση του προβλήματος

Αναζητάμε συνάρτηση $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία να είναι λύση του προβλήματος δυο σημείων

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \qquad \forall\, x \in [a, b], \tag{1}$$
$$u'(a) = u'(b) = 0, \tag{2}$$

όπου $f,\ q : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γνωστές συναρτήσεις. Για να διασφαλίσουμε τη μοναδικότητα της λύσης του συγκεκριμένου προβλήματος θα υποθέσουμε ότι $q_{min} = \min_{x\in[a,b]} q(x) > 0$. Επίσης, οι πραγματικοί αριθμοί $a,\ b$ με $a < b$ και ο $u_0 \in \mathbb{R}$, είναι δοσμένα.

Μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Δοσμένου ενός φυσικού αριθμού $N \geq 2$, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $h = \frac{b-a}{N}$ με κόμβους τα σημεία $t^n = a + nh$, για $n = 0, \ldots , N$. Ορίζουμε τον χώρο των πεπερασμένων στοιχείων ως

$$S_h := \left\{ \chi \in \mathcal{C}([a, b]) \,:\, \chi|_{[x_j ,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}_1, \quad \text{για} \quad j = 0, \ldots , N - 1 \right\},$$

του οποίου η διάσταση είναι $N + 1$. Έστω $\{\phi_j\}_{j=0}^N$ μια βάση του S_h, τότε η ζητούμενη προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων $u_h \in S_h$ της u μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός της βάσης, δηλαδή

$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{N} \mathcal{\alpha}_j \phi_j(x),$$

και προσδιορίζεται από

$$\int_a^n u_h'(x)\phi'(x)\, dx + \int_a^b u_h(x)\phi(x)\, dx = \int_a^b f(x)\phi(x)\, dx, \quad \forall\ \phi \in S_h.$$

Συνεπώς, οι συντελεστές $\{\mathcal{\alpha}_j\}_{j=0}^N$ προσδιορίζονται από την λύση του γραμμικού συστήματος

$$\sum_{j=0}^{N} \left(\int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)\, dx + \int_a^b q(x)\phi_j(x)\phi_i(x)\, dx \right) = \int_a^b f(x)\phi_i(x)\, dx, \quad i = 0, \ldots , N. \tag{3}$$

Θεωρούμε τους πίνακες $\mathcal{M},\ \mathcal{S} \in \mathbb{R}^{N+1,N+1}$ με στοιχεία $\{m_{ij}\}$ και $\{s_{ij}\}$, αντίστοιχα για $i, j = 0, \ldots , N$, τα οποία δίδονται από τις

$$m_{ij} = \int_a^b q(x)\phi_j(x)\phi_i(x)\, dx, \qquad i, j = 0, \ldots , N,$$
$$s_{ij} = \int_a^b \phi_j'(x)\phi_i'(x)\, dx, \qquad i, j = 0, \ldots , N.$$

Επίσης, ορίζουμε το σταθερό διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^{N+1}$ με στοιχεία b_i, $i = 0, \ldots , N$, τα οποία δίδονται από

$$b_i = \int_a^b f(x)\phi_i(x)\, dx, \quad i = 0, \ldots , N.$$

Επιλέγοντας την συνήθη βάση του S_h, η οποία αποτελείται από τις συναρτήσεις

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & \text{αν} \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & \text{αν} \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \forall\, x \in [a, b], \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases}$$

παρατηρήστε ότι οι πίνακες $\mathcal{M}$ και $\mathcal{S}$ είναι τριδιαγώνιοι και τα στοιχεία τους δίδονται από

$$
\begin{aligned}
m_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q(x)\phi_i(x)^2\,dx, && i = 0,\dots,N,\\
m_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\phi_{i+1}(x)\phi_i(x)\,dx, && i = 0,\dots,N-1,\\
m_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\phi_{i-1}(x)\phi_i(x)\,dx, && i = 1,\dots,N.
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
s_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i'(x)^2\,dx, && i = 0,\dots,N,\\
s_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}'(x)\phi_i(x)\,dx, && i = 0,\dots,N-1,\\
s_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_{i-1}'(x)\phi_i'(x)\,dx, && i = 1,\dots,N.
\end{aligned}
$$

Το σταθερό διάνυσμα δίδεται από

$$
b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x)\,dx, \qquad i = 0,\dots,N.
$$

Άσκηση 1

Προσδιορίστε τον πίνακα $\mathcal{S}$ ως προς την βάση που ορίστηκε παραπάνω.

Άσκηση 2

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο θα προσδιορίζει τον πίνακα $\mathcal{M}$. Σε αντίθεση με το προηγούμενο εργαστήριο, όπου είχαμε $q(x) = 1,\ \forall x \in [a,b]$ και ως εκ τούτου ο $\mathcal{M}$ ήταν σταθερός, τώρα δεν είναι σταθερός πίνακας και πρέπει να προσδιορισθεί με την βοήθεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων εφαρμόστε τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson. Για μια συνάρτηση g και κάποιο $l \in \{0,\dots,N\}$, το ολοκλήρωμα της μπορεί να προσεγγισθεί από

$$
\begin{aligned}
\int_{x_{l-1}}^{x_{l+1}} g(x)\,dx &= \int_{x_{l-1}}^{x_l} g(x)\,dx + \int_{x_l}^{x_{l+1}} g(x)\,dx\\
&\approx \frac{h}{6}\left[g(x_{l-1}) + 4g\left(\frac{x_{l-1}+x_l}{2}\right) + g(x_l)\right] + \frac{h}{6}\left[g(x_l) + 4g\left(\frac{x_l+x_{l+1}}{2}\right) + g(x_{l+1})\right],
\end{aligned}
$$

όταν $g(x) = q(x)\phi_l(x)^2$. Επίσης,

$$
\int_{x_l}^{x_{l+1}} g(x)\,dx \approx \frac{h}{6}\left[g(x_l) + 4g\left(\frac{x_l+x_{l+1}}{2}\right) + g(x_{l+1})\right],
$$

όταν $g(x) = q(x)\phi_l(x)\phi_{l+1}(x)$.

Άσκηση 3

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο θα προσδιορίζει το διάνυσμα b για μια δοσμένη συνάρτηση f ως προς την παραπάνω βάση. Για την προσέγγιση του ολοκληρώματος εφαρμόστε τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson. Για μια συνάρτηση g και κάποιο $l \in \{0,\dots,N\}$, το ολοκλήρωμα της μπορεί να προσεγγισθεί από

$$
\begin{aligned}
\int_{x_{l-1}}^{x_{l+1}} g(x)\,dx &= \int_{x_{l-1}}^{x_l} g(x)\,dx + \int_{x_l}^{x_{l+1}} g(x)\,dx\\
&\approx \frac{h}{6}\left[g(x_{l-1}) + 4g\left(\frac{x_{l-1}+x_l}{2}\right) + g(x_l)\right] + \frac{h}{6}\left[g(x_l) + 4g\left(\frac{x_l+x_{l+1}}{2}\right) + g(x_{l+1})\right],
\end{aligned}
$$

με $g(x) = f(x)\phi_l(x)$.

Άσκηση 4

Θεωρήστε το πρόβλημα δυο σημείων

$$-u''(x) + (x^2+1)u(x) = x^2\frac{\cos(2\pi x)}{1+4\pi^2} + \cos(2\pi x), \qquad \forall\, x \in [0,1], \tag{4}$$

$$u'(a) = u'(b) = 0, \tag{5}$$

του οποίου η λύση δίδεται από $u(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{1+4\pi^2}$, $x \in [0,1]$. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει την προσέγγιση $u_h \in S_h$ της u, με την έννοια του προσδιορισμού των συντελεστών $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0}^N$ ως προς την παραπάνω βάση. Παρατηρήστε από την (3) ότι οι παραπάνω συντελεστές αποτελούν λύση του γραμμικού συστήματος,

$$(\mathcal{S} + \mathcal{M})\mathcal{A} = b,$$

με $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_N)^T$.

Άσκηση 5

Για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά τον αλγόριθμο, βρείτε το σφάλμα της προσέγγισης $\mathcal{E}(h)$ στην L_2 νόρμα, το οποίο δίδεται από

$$\mathcal{E}(h) := \|u - u_h\|_{L_2([a,b])} = \left(\int_a^b |u(x) - u_h(x)|^2\, dx\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (6) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$p(h_1,h_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{E}(h_1)}{\mathcal{E}(h_2)}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}. \tag{7}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $p(h_1,h_2) \approx 2$. Επιπλέον, βρείτε το σφάλμα της μεθόδου $\mathcal{Z}(h)$ για την παράγωγο στην ίδια νόρμα, το οποίο δίδεται από

$$\mathcal{Z}(h) := \|u' - u_h'\|_{L_2([a,b])} = \left(\int_a^b |u'(x) - u_h'(x)|^2\, dx\right)^{1/2}. \tag{8}$$

Υπολογίζοντας το σφάλμα (8) για δυο διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς $N_1 < N_2$, υπολογίστε την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου για τα N_1, N_2, η οποία ορίζεται ως

$$\tilde{p}(h_1,h_2) = \frac{\ln\left(\frac{\mathcal{Z}(h_1)}{\mathcal{Z}(h_2)}\right)}{\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)}. \tag{9}$$

Καταλήξτε στο συμπέρασμα ότι $\tilde{p}(h_1,h_2) \approx 1$.

Αναμενόμενα σφάλματα

Επαληθεύστε τα σφάλματα για $h = [\frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{400}]$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(h_1) &= 1.01848240e-05, \quad & \mathcal{Z}(h_1) &= 0.00319142,\\
\mathcal{E}(h_2) &= 2.25591630e-06, \quad & \mathcal{Z}(h_2) &= 0.00150198,\\
\mathcal{E}(h_3) &= 5.41170373e-07, \quad & \mathcal{Z}(h_3) &= 0.00073564.
\end{aligned}$$

Για να υπολογιστεί το σφάλμα, θα πρέπει να γίνει αριθμητική ολοκλήρωση στο ολοκλήρωμα. Παρατηρήστε ότι πλέον σε κάθε υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ η u_h μπορεί να γραφεί ως

$$u_h|_{[x_i,x_{i+1}]}(x) = \mathcal{A}_i\phi_i(x) + \mathcal{A}_{i+1}\phi_{i+1}(x).$$

Συνεπώς,

$$\|u - u_h\|^2_{L_2([a,b])} = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} |u(x) - u_h(x)|^2\, dx.$$

Για τον υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του μέσου, δηλαδή για μια συνάρτηση g,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)\, dx \approx h\, g\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

με $g(x) = (u(x) - u_h(x))^2$.